



# Sur la 2-extension maximale non ramifiée de la $\mathbf{Z}_2$ -extension cyclotomique de certains corps quadratiques

Ali MOUHIB

## Abstract

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux nombres premiers distincts,  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  et  $k_\infty$  la  $\mathbf{Z}_2$ -extension cyclotomique de  $k$ . Soient  $\mathcal{L}_\infty$  la 2-extension maximale non ramifiée sur  $k_\infty$  et  $L_\infty$  la sous-extension abélienne maximale de  $\mathcal{L}_\infty/k_\infty$ . Sous certaines conditions sur les premiers  $\ell$  et  $\ell'$ , nous étudions la structure des groupes de Galois  $Gal(L_\infty/k_\infty)$  et  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$ .

## 1 Introduction

Soient  $p$  un nombre premier et  $\mathbf{Z}_p$ -l'anneau des entiers  $p$ -adiques. Soient  $k$  un corps de nombres et  $k_\infty$  une  $\mathbf{Z}_p$  extension de  $k$ . Notons  $\mathcal{L}_\infty$  la  $p$ -extension maximale non ramifiée sur  $k_\infty$  et  $L_\infty$  la sous-extension abélienne maximale de  $\mathcal{L}_\infty/k_\infty$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $A_n$  le  $p$ -groupe de classe du  $n$ -ième étage  $k_n$  de  $k_\infty$ . Le théorème fondamental d'Iwasawa sur les ordres des  $A_n$  s'énonce comme suit : il existe des entiers  $\lambda, \mu \geq 0$  et  $\nu$  appelés invariants d'Iwasawa tels que pour  $n$  assez grand, on a

$$|A_n| = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}.$$

Il est bien connu que pour  $n$  assez grand  $A_n$  se surjecte dans  $A_{n-1}$  via l'application norme. On définit, ainsi la limite projective des  $A_n$  suivant ces

---

Key Words: Iwasawa theory, Quadratic extensions  
2010 Mathematics Subject Classification: Primary:11R23 Secondary:11R11  
Received: July, 2013.  
Accepted: November, 2013.

applications normes et on pose  $X_\infty := \varprojlim A_n \simeq \text{Gal}(L_\infty/k_\infty)$ . On vérifie ainsi que

$$\lambda = \mu = 0 \text{ si et seulement si } X_\infty \text{ est fini .}$$

A noter que si  $k$  est abélien et  $k_\infty$  est cyclotomique, alors  $\mu = 0$  [4]. Si  $k$  est totalement réel, la conjecture de Greenberg précise la nullité des invariants  $\lambda$  et  $\mu$  [5].

Plusieurs travaux ont été consacré à l'étude de la conjecture de Greenberg pour la  $\mathbf{Z}_2$ -extension cyclotomique des corps quadratiques réels. Nous citons quelques travaux qui nous intéressent concernant l'invariant  $\lambda$  d'Iwasawa de la  $\mathbf{Z}_2$ -extension cyclotomique des corps quadratiques réels  $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  où  $\ell$  et  $\ell'$  désignent des premiers impairs distincts :

Dans [12], les auteurs ont déterminé une liste de corps quadratiques réels  $k$  tels que  $X_\infty(k)$  est fini. En particulier, ils ont démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** Soit  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  où  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux nombres premiers tels que  $\ell \equiv 5 \pmod{8}$  et  $\ell' \equiv -1 \pmod{4}$ , alors l'invariant  $\lambda(k)$  d'Iwasawa de  $k$  est nul.

T. Fukuda et K. Komatsu ont amélioré le théorème précédent ([3], Theorem 2.2):

**Théorème 1.2.** Soit  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  où  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux nombres premiers tels que  $\ell \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\ell' \equiv 3 \pmod{8}$ ,  $\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = -1$  et  $2^{\frac{\ell-1}{4}} \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ . Alors l'invariant  $\lambda$  d'Iwasawa de  $k$  est nul.

**Remarque 1.3** Le symbole biquadratique  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4$  est défini par  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 \equiv 2^{\frac{\ell-1}{4}} \pmod{\ell}$ . Ainsi, l'inéquivalence  $2^{\frac{\ell-1}{4}} \not\equiv 1 \pmod{\ell}$  peut s'écrire sous la forme  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$ . Dans ce travail, on s'intéresse à la structure des groupes

$\text{Gal}(\text{Gal}(L_\infty/k_\infty))$  et  $\text{Gal}(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  pour la famille des corps quadratiques réels  $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  où  $\ell$  et  $\ell'$  désignent des premiers impairs distincts. Nous démontrons ainsi les résultats suivants :

**Théorème 1.4.** Soit  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$  où  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux nombres premiers tels que  $\ell \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\ell' \equiv -1 \pmod{4}$  et  $\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = -1$ , alors  $X_\infty(k) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(a)  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$  et  $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = -1$ ,

(b)  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = -1$  et  $\ell \equiv 9 \pmod{16}$ ,

(c)  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 = 1$ ,  $\ell \equiv 9 \pmod{16}$  et  $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = 1$ .

**Théorème 1.5.** Soit  $k$  comme dans l'énoncé du théorème précédent. Si l'une des conditions (a), (b) ou (c) est vérifiée, alors le groupe  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est métacyclique fini, précisément, abélien, quaternionique ou diédral. Si de plus  $\left(\frac{2}{\ell}\right)_4 \neq (-1)^{\frac{\ell-1}{8}}$ , alors  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est abélien ; particulièrement pour le cas (c),  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est abélien.

Notons que dans [9], nous avons étudié la structure du groupe de Galois  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  pour une autre famille de corps quadratiques réels.

## 2 Remarques sur l'invariant $\lambda$ d'Iwasawa

Pour démontrer les deux théorèmes 1.4 et 1.5, nous aurons besoin de la proposition suivante qui donne une condition suffisante sur la finitude du module d'Iwasawa abélien non ramifié  $X'_\infty := Gal(L'_\infty/k_\infty)$  où  $L'_\infty$  est la sous-extension de  $L_\infty/k_\infty$  où toutes les places  $p$ -adiques de  $k_\infty$  se décomposent totalement.

Notons pour tout entier naturel  $n$ ,  $L'_n$  la sous-extension de  $L_n/k_n$  où toutes les places  $p$ -adiques de  $k_n$  se décomposent totalement. On a bien  $L'_\infty = \cup_n L'_n$  et  $A'_n \simeq Gal(L'_n/k_n)$ , où  $A'_n$  désigne le  $p$ -groupe des  $p$ -classes de  $k_n$ .

Soit  $\gamma$  un générateur topologique de  $Gal(k_\infty/k)$ . On sait que  $\gamma$  agit par conjugaison sur  $X_\infty$  et sur  $X'_\infty$ . Par la correspondance  $\gamma - 1 \longleftrightarrow T$ , il est bien connu d'après ([7], Theorem 5, Theorem 8) que  $X_\infty, X'_\infty$  sont des  $\Lambda := \mathbf{Z}_p[[T]]$ -modules de types finis.

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $m \geq n \geq 0$ ,  $w_n = (1+T)^{p^n} - 1$  et  $\nu_{n,m} = \frac{w_m}{w_n}$ . Notons par  $Y' = Gal(L'_\infty/k_\infty L'_{n_0})$ . On a le diagramme commutatif suivant [7]:

$$\begin{array}{ccc}
A'_m & \xrightarrow{\simeq} & X'_\infty/\nu_{n_0,m}Y' \\
\downarrow & & \downarrow \\
A'_n & \xrightarrow{\simeq} & X'_\infty/\nu_{n_0,n}Y'
\end{array}$$

Il est bien connu d'après ([2], Theorem 1), que s'il existe un entier naturel  $n \geq n_0$  tel que  $|A_n| = |A_{n+1}|$ , alors pour tout entier naturel  $m \geq n$ , on a  $|A_m| = |A_n|$ .

Nous démontrons un résultat similaire au theorem 1 de [2] pour les groupes  $A'_n$  :

**Proposition 2.1.** Supposons qu'il existe un entier naturel  $n \geq n_0$  tel que  $|A'_n| = |A'_{n+1}|$ , alors pour tout entier naturel  $m \geq n$ , on a  $|A'_m| = |A'_n|$ . Précisément, on a  $X'_\infty \simeq A'_n$ .

**Preuve :** Supposons qu'il existe un entier naturel  $n \geq n_0$  tel que  $|A'_n| = |A'_{n+1}|$ , alors de la commutativité du diagramme précédent, l'isomorphisme  $A'_{n+1} \rightarrow A'_n$  entraîne l'isomorphisme  $X'_\infty/\nu_{n_0,n+1}Y' \rightarrow X'_\infty/\nu_{n_0,n}Y'$ . Alors  $\nu_{n_0,n+1}Y' = \nu_{n_0,n}Y'$ . Ce qui implique que  $\nu_{n,n+1}\nu_{n_0,n}Y' = \nu_{n_0,n}Y'$ . D'autre part, comme  $\nu_{n,n+1}$  est contenu dans l'unique idéal maximal de  $\Lambda$  engendré par  $p$  et  $T$  et que  $\nu_{n_0,n}Y'$  est un  $\Lambda$ -module de type fini, alors par application du lemme de Nakayama, on trouve que  $\nu_{n_0,n}Y' = 0$  et donc  $X'_\infty \simeq A'_n$ . Dans [7], les invariants d'Iwasawa liés à l'extension  $L'_n/k_n$  notés  $\lambda', \mu' \geq 0$  et  $\nu'$  sont tels que pour  $n$  assez grand, on a  $|A'_n| = p^{\lambda'n + \mu'n + \nu'}$ . Notons que  $A'_n \simeq Gal(L'_n/k_n)$  et que  $X'_\infty$  est fini si et seulement si  $\lambda' = \mu' = 0$ .

En supposant que toutes les places  $p$ -adiques sont ramifiées dans  $k_\infty/k$  (cette hypothèse est vérifiée par exemple dans le cas où  $k_\infty$  est la  $\mathbf{Z}_p$ -extension cyclotomique de  $k$ ). On a  $rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L_\infty/L'_\infty)) \leq s$  où  $s$  est le nombre des places  $p$ -adiques de  $k_\infty$ .

On a

$$\lambda - s \leq \lambda' \leq \lambda \text{ et } \mu = \mu',$$

où

$$rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L_\infty/k_\infty)) = \lambda \text{ et } rang_{\mathbf{Z}_p}(Gal(L'_\infty/k_\infty)) = \lambda'.$$

Dans le cas où il existe une seule place  $p$ -adique dans  $k_\infty$ , alors d'après l'inégalité précédente, on a  $\lambda' = 0$  entraîne  $\lambda \leq 1$ . Dans la proposition qui suit, nous donnons une condition permettant de voir la nullité de  $\lambda$ .

**Proposition 2.2.** Soit  $k$  un corps de nombres,  $p$  un nombre premier et  $k_\infty$  une  $\mathbf{Z}_p$ -extension de  $k$ . Supposons qu'un seul premier de  $k$  est au dessus de  $p$  et que ce premier est totalement ramifié dans  $k_\infty$ . Alors  $\lambda = \mu = 0$  si et seulement si  $\lambda' = \mu' = 0$ .

**Preuve :**

L'implication  $\lambda = \mu = 0$  entraîne  $\lambda' = \mu' = 0$  est triviale. Démontrons la réciproque.

Il est bien connu que la place  $p$ -adique de l'étage  $\mathbf{Q}_n$  de la  $\mathbf{Z}_p$ -extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}$  est triviale et il n'est pas difficile de voir que l'ordre de la classe de la place  $p$ -adique de  $k_n$  est égal à  $\frac{|A_n|}{|A'_n|}$  qui divise à son tour  $[k : \mathbf{Q}]$ . Or par hypothèse  $|A'_n|$  est borné, lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il s'ensuit que  $\frac{|A_n|}{|A'_n|}$  est borné lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ce qui démontre la proposition.

**Remarques :**

(i) Notons que dans le cas où  $p$  est impair et que  $k$  est abélien sur  $\mathbf{Q}$ , on a pour tout  $n \geq n_0$ ,  $A_n = A'_n$  ([10], Lemma 1.5). Ce qui démontre la proposition, dans ce cas.

(ii) Dans le cas où  $p$  est un nombre premier impair et que tous les étages  $k_n$  vérifient la conjecture de Leopoldt, alors  $\lambda' = \mu' = 0$  entraîne  $\lambda = \mu = 0$  [11].

### 3 Preuves des théorèmes 1.4 et 1.5

Dans toute la suite  $\ell$  et  $\ell'$  désignent des nombres premiers tels que  $\ell \equiv -\ell' \equiv 1 \pmod{4}$  et  $\left(\frac{2}{\ell}\right) = -\left(\frac{\ell}{\ell'}\right) = 1$  et  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell\ell'})$ .

Notons que le 2-groupe de classes de  $k$  est cyclique d'ordre 2 [13] et que le 2-groupe de classes de  $k_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\ell\ell'})$  est de type  $(2, 2)$  [1]. Comme  $\left(\frac{2}{\ell}\right) = 1$ , alors la place 2-adique de  $k$  se décompose dans le 2-corps de classes de Hilbert  $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{\ell}, \sqrt{\ell'})$  de  $k$ , par suite  $|A_0| = |A'_0| = 2$ .

**Preuve du théorème 1.4 :**

Pour les trois cas du théorème 1.4, on va démontrer que  $|A'_0| = |A'_1| = 2$  et

ensuite, on applique les propositions 2.1 et 2.2.

On a 2 se ramifie totalement dans  $k_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\ell\ell'})$ . Notons  $\mathcal{P}$  la place 2-adique de  $k_1$ . Pour démontrer que  $|A'_1| = 2$ , il suffit de démontrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas principal.

On a  $N_{k_1/\mathbf{Q}(\sqrt{2})}(\mathcal{P}) = \sqrt{2}o_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})}$  où  $o_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})}$  désigne l'anneau des entiers de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ . Supposons que  $\mathcal{P}$  est principal, alors il existe une unité  $u$  de  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$  telle que  $u\sqrt{2}$  est norme dans l'extension  $k_1/\mathbf{Q}_1$ . Ce qui est impossible, si la condition (a), (b) ou (c) du théorème 3.4 est satisfaite. En effet :

Soit  $\mathcal{Q}$  une place de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  ramifiée dans l'extension  $k_1/\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  et soit le générateur de  $Gal(\mathbf{Q}_1/\mathbf{Q})$ . Supposons que  $\mathcal{Q}$  est au dessus de  $\ell$ , alors par un calcul sur le symbole du reste normique, nous démontrons que :

$$\left( \frac{\pm\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = \left( \frac{2}{\ell} \right)_4. \quad (1)$$

$$\left( \frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \equiv 1 \pmod{16}, \\ -1 & \text{si } \ell \equiv 9 \pmod{16}, \end{cases} \quad (2)$$

où  $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$  désigne l'unité fondamentale de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ .

Supposons que  $\mathcal{Q}$  est au dessus de  $\ell'$ , alors dans le cas où  $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = -1$ , on trouve que

$$\left( \frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) = -1, \quad (3)$$

et dans le cas où  $\left(\frac{2}{\ell'}\right) = 1$ , on a

$$\left( \frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\mathcal{Q}} \right) \left( \frac{\pm\epsilon\sqrt{2}, \ell\ell'}{\sigma(\mathcal{Q})} \right) = 1. \quad (4)$$

Ainsi, si l'une des conditions (a), (b) ou (c) du théorème 3.4 est satisfaite, alors en combinant entre les équations (1), (2), (3) et (4), on trouve que pour toute unité  $u$  de  $\mathbf{Q}_1$ ,  $u\sqrt{2}$  n'est pas norme dans  $k_1/\mathbf{Q}_1$ . Par suite,  $\mathcal{P}$  n'est pas principal et comme  $|A_1| = 2$ , alors  $L'_1 = L_0k_1$  et  $|A'_0| = |A'_1| = 2$ . Moyennant les proposition 3.6 et 3.7, nous avons  $\lambda(k) = \mu(k) = 0$ . D'autre part, la place 2-adique de  $k_n$  est ramifiée dans l'extension  $k_n/\mathbf{Q}_n$ . Or, le groupe de classes de  $\mathbf{Q}_n$  est trivial, alors la place 2-adique de  $k_n$  est d'ordre égal à 2. Il s'ensuit que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $A(k_n) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , d'où le théorème 3.4.

#### Preuve du théorème 1.5 :

Plaçons nous dans l'une des conditions du théorème 1.4. Montrons pour le

moment que  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est fini. Il est clair que  $Gal(\mathcal{L}_\infty/L_\infty)$  est le commutateur de  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  et on a  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)/Gal(\mathcal{L}_\infty/L_\infty) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Remarquons que pour tout entier  $n \geq 1$ , la place 2-adique  $\mathcal{P}_n$  de  $k_n$  se décompose dans  $L'_n$ . D'autre part, il existe une seule place 2-adique dans la  $\mathbf{Z}_2$ -extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$ . Comme le nombre de classes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$  est impair, alors tous les étages  $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell'})$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell'})$  sont de nombre de classes impair. Ce qui entraîne que la place 2-adique de  $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell'})$  reste principale en se décomposant dans  $L'_n$ . Par conséquent, la place 2-adique de  $k_n$  capitule en se décomposant dans  $L'_n$ . En appliquant ([8], Theorem 2), on a bien  $A(L'_n)$  est cyclique. D'autre part, le groupe  $Gal(L'_\infty/L'_1)$  laisse  $A(L'_n)$  fixe, et d'après [G, proposition 1],  $|A(L'_n)|$  est borné lorsque  $n$  tend vers l'infini, il s'ensuit que  $X_\infty(L'_n)$  est cyclique d'ordre fini. Ainsi, le groupe  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est métacyclique d'ordre fini. De plus, d'après ([6], Chap. 5, Theorem 4.5), le groupe  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est abélien, quaternionique, diédral ou semi-diédral. Comme la place 2-adique de  $k_n$  capitule en se décomposant dans  $L'_n$ , alors d'après ([8], Theorem 2),  $L'_n/k_n$  est de type (A), ainsi  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  ne peut jamais être semi-diédral.

Pour finir la preuve du théorème, on va démontrer que dans le cas où  $(\frac{2}{\ell})_4 \neq (-1)^{\frac{\ell-1}{8}}$ , on a  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty)$  est abélien. Il est clair que les places 2-adiques de  $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$  se ramifient dans  $L'_n$ . D'autre part, d'après [12],  $X_\infty(\mathbf{Q}(\sqrt{\ell})) = 0$ , ce qui entraîne que le nombre de classes de chaque étage  $\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$  est impair. Or  $L'_n/\mathbf{Q}_n(\sqrt{\ell})$  est une extension quadratique ramifiée en les places 2-adiques, alors les places 2-adiques de  $L'_n$  sont d'ordres divisibles par 2, donc d'ordres égal à 2. Par conséquent, on a  $Gal(\mathcal{L}_\infty/k_\infty) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

**Acknowledgement.** The publication of this article is partially supported by the Grant of Romanian National Authority for Scientific Research CNCS-UEFISCDI, Project No. PN-II-ID-WE-2012-4-161.

## References

- [1] A. Azizi, A. Mouhib, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de  $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$  où  $d$  est un entier naturel sans facteurs carrés*, Acta Arith. 109, no 1, 27-73 (2003).
- [2] T. Fukuda, *Remarks on  $Z_p$ -extensions of number fields*, Proc. Japan Acad. Ser. A 70 (1994) 264-266.

- [3] T. Fukuda and K. Komatsu, *On the Iwasawa  $\lambda$ -Invariant of the cyclotomic  $\mathbf{Z}_2$ -extension of a real quadratic fields*, Tokyo J. Math. 28, No. 1 (2005) 259-264.
- [4] B. Ferrero and L. C. Washington, *The Iwasawa invariant  $\mu_p$  vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math., 109 (1979), 377-395.
- [5] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. 98 (1976) 263-284.
- [6] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, new York, 1986.
- [7] K. Iwasawa, *On  $Z_l$ -extensions of algebraic number fields*, Ann. of Math. (2) 98 (1973), 246-326.
- [8] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory 8 (1976) 271-279.
- [9] A. Mouhib and A. Movahhedi,  *$p$ -class tower of a  $Z_p$ -extension*, Tokyo Journal of Math. vol 31 (2008), 321- 332
- [10] T. Nguyen Quang Do, M. Lescop, *Iwasawa Descent and co-descent for units modulo circular units*, Pure and Applied Mathematics Quarterly. Volume 2, Number 2 (2006), 199-217.
- [11] Neukirch, Jürgen; Schmidt, Alexander; Wingberg Kay, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental principles of Mathematical Sciences], 323. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [12] M. Ozaki, H. Taya, *On the Iwasawa  $\lambda_2$ -invariants of certain families of real quadratic fields*. Manuscripta Math. 94 (1997), no. 4, 437-444.
- [13] L. Rédei et H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. 170 (1933), 69-74.

Ali MOUHIB  
Univ de Fes, LMAO  
Faculté polydisciplinaire de Taza  
B.P 1223 Taza Gare  
Maroc  
Email: mouhibali@yahoo.fr