An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 13(1), 2005, 15–20

EXTENSIONS ABSOLUMENT MODULAIRES

Mustapha Chellali

Abstract

The modulars extensions are for the purely inseparables extensions what are the Galoisian extensions for the separables extensions. However if L is an intermediate field of K/k, we haven't $K/k \quad modular \Longrightarrow K/L \quad modular$. Such extensions are described in [5], in the case, K is a tensor product of simples extensions. We gives here a description in the general case.

Résumé. Les extensions modulaires sont pour les extensions purement inséparables ce que les extensions galoisiènes sont pour les extensions séparables. Cependant si L est un corps intermédiaire de K/k, on a pas : K/k modulaire $\Rightarrow$K/L modulaire. Telles extensions sont décrites dans [5], dans le cas ou K est produit tensoriel d'extension simples. On donne ici un description dans le cas géneral.

MS Classification-numbers 2000: 12F15.

1 Extensions modulaires

On rappelle qu'une extension quelconque K/k est dite *modulaire* si pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^{p^n} et k sont $K^{p^n} \cap k$-linéairement disjointes. Cette notion caractérise les extensions purement inséparables d'exposant fini, qui sont produit tensoriel sur k d'extensions simples sur k (cf. [6]).

Par définition on appel *subbase* (ou *base modulaire*) d'une extension modulaire d'exposant fini K/k, tout $B \subset K$ tel que $K = k(B)$ et tel que pour tout ensemble fini $B_1 \subset B$, on a $k(B_1) = \bigotimes_{\theta \in B_1} k(\theta)$ sur k.

Key Words: Field extensions; Modular extensions; Separable extensions.

Le théorème de [6] a été légerement amélioré dans [4]. On a

Théorème 1 *Soit K/k une extension purement inséparable. Soit k_r la cloture relativement parfaite de k dans K. Supposons K/k_r d'exposant fini et k_r/k modulaire. Il est équivalent de dire :*

1. *K/k est modulaire.*
2. *Il existe une sous-extension M/k de K/k qui est produit tensoriel sur k d'extensions simples sur k, telle que :*

$$K = k_r \otimes_k M.$$

Lemma 1 *Soit K/k une extension purement inséparable. Si $K = K_1 \otimes_k K_2$, avec K_i/k modulaires, alors K/k est modulaire.*

Preuve. K_1 est réunion inductive d'extensions finies F_i/k. Soit M_i/k la cloture modulaire de F_i/k. On a $M_i \subset K_1$. On sait que M_i/k est finie. Par suite K_1 est réunion inductive d'extensions modulaires finies M_i/k. De même pour K_2. Donc K est réunion inductive d'extensions $M_i \otimes_k M_j$ qui sont modulaires par [6]. Donc K/k est modulaire.

Comme conséquence immédiate de la définition de modularité, on a

Problem 1 *Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, si K/k est modulaire et si $k^{p^n} \subset K^{p^m}$, alors K^{p^m}/k^{p^n} est modulaire.*

La condition $n \geq m$ assure $k^{p^n} \subset K^{p^m}$.

Dans les questions de linéarité disjointe, on rencontre souvent la propriété suivante:

Lemma 2 *Soit $K_1, K_2, \ldots, K_m$ des sous-corps d'un même corps Ω. Soient L_i un sous-corps de K_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ et $L = \prod L_i$. Si $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sont k-linéairement disjoints, alors $L_1K_1, L_2K_2, \ldots, L_mK_m$ sont kL-linéairement disjoints.*

La propriété est bien connue si $m = 2$, et se génétalisent aisement par recurrence.

2 Extensions absolument modulaires

Nous allons maintenant décrire les extensions K/k vérifiant la condition K/L modulaire pour tout corps intermédiaire de K/k. Une telle déscription existe déjà, dans le cas où K/k admet une subbase (c'est-á-dire K est produit tensoriel sur k d'extensions simples de k).

Problem 2 *Soit K/k une extension purement inséparable. Il est équivalent de dire:*

1. *L'ensemble des corps intermédiaires de K/k est totalement ordonné pour l'inclusion.*
2. *K est réunion croissante d'extensions simples.*
3. *Toute sous-extension propre de K/k est simple.*
4. *Toute sous-extension finie de K/k est simple.*

Preuve. Montrons (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit (1) et $E = \{k(\theta) | \theta \in K\}$. Si E est fini, par (1), $K = \bigcup k(\theta) = k(\widehat{\theta})$ avec $k(\widehat{\theta})$ le plus grand élément de E. Si E est infini, on peut construire une suite strictement croissante $k(\theta_1) \subset k(\theta_2) \subset \dots$. Soit $x \in K$; il existe i tel que $[k(\theta_i), k] > [k(x), k]$; on ne peut donc avoir $k(\theta_i) \subset k(x)$; donc $k(x) \subset k(\theta_i)$; donc $K = \bigcup k(\theta_i)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) car, si (2) soit L un corps intermédiaire propre de K/k. Ecrivons que $K = \bigcup_n k(a_n)$. Si L/k est fini, il existe n tel $L \subset k(a_n)$. Posons $[L, k] = p^t$ et $[k(a_n), k] = p^m$. Donc $[k(a_n), L] = p^{m-t}$. Donc $k(a_n^{p^{m-t}}) \subset L$. Or $[k(a_n^{p^{m-t}}), k] = p^t = [L, k]$. Donc $L = k(a_n^{p^{m-t}})$ simple. Si L/k est infini, comme $L \neq K$, il existe n tel que $a_n \notin L$. Soit $x \in L$. Comme ci-dessus $k(x, a_n)$ est simple. Clairement $o(k(x, a_n)/k) = max(o(x/k), o(a_n/k))$. Donc il existe $a \in \{x, a_n\}$ tel que $k(x, a_n) = k(a)$. Comme $a_n \notin k(x) (\subset L)$, on a $a = a_n$. Donc $x \in k(a_n)$. Soit $L \subset k(a_n)$. Donc L/k est finie, contradiction.

(3) $\Longrightarrow$ (4) immédiat.

Montrons (4) $\Longrightarrow$ (1). Soit (4), soient L_1, L_2 des corps intermédiaires de K/k . Si $L_1 \not\subset L_2$, soit $x \in L_1 \setminus L_2$; soit $y \in L_2$, on a $k(x, y)/k$ est fini, donc simple; donc $k(x) \subset k(y)$ ou $k(y) \subset k(x)$; or $k(x) \not\subset k(y) \subset L_2$; donc $k(y) \subset k(x)$; par suite, $L_2 \subset k(x) \subset L_1$.

Définition 1 *Une extension K/k purement inséparable est dite q-simple (lire quasi-simple) si elle vérifie les propriétés équivalentes de la proposition ci-dessus.*

Les extensions de la forme $k(x^{p^{-\infty}})$ sont q-simples. Ils existent des extensions q-simples qui ne sont pas de cette forme (cf. [2]).

Si k est un corps commutatif, on appel degré d'imperfection de k, le cardinal d'une p-base de k (une subbase de k/k^p). On le notera $di(k)$.

Théorème 2 *Soit K/k une extension purement inséparable. Pour que K soit modulaire sur tout corps intermédiaire de K/k il faut et il suffit que $di(k) \leq 2$ ou K est parfait ou que $K = S \otimes_k P$ avec S q-simple et $P^p \subset k$.*

Preuve. La condition est suffisante car, si $di(k) \leq 2$, toute extension purement inséparable de k est modulaire (cf [3] Corollaire 3 page 381). Si $K = S \otimes_k P$ avec S q-simple et $P^p \subset k$, soit L un corps intermédiaire de K/k. On a $K = L(S)(P)$. Comme P est un générateur de $K/L(S)$ (c'est-á-dire K=L(S)(P)) et $P^p \subset L(S)$, il existe $P_1 \subset P$ avec P_1 base (c'est-á-dire générateur minimal) de $K/L(S)$. Comme P_1 est aussi minimal sur k et $P_1^p \subset k$, P_1 est aussi une base de $k(P_1)/k$. Donc $L(S)$ et $k(P_1)$ sont k-linéairement disjoints. Donc $K = L(S) \otimes_k k(P_1)$. Donc par le lemme 2, $K = L(S) \otimes_L L(P_1)$. Comme $L(S)/L$ est q-simple, elle est modulaire. Et comme $L(P_1)/L$ est d'exposant 1, elle est modulaire. Par suite par le lemme 1, K/L est modulaire.

Inversement, si K est modulaire sur tout corps intermédiaire de K/k, supposons $di(k) > 2$.

1. Cas : $k \not\subset K^p$

   Posons $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$. Comme K/k est modulaire, k_n/k est modulaire et d'exposant fini. Donc k_n/k admet une subbase B. Montrons que au plus un élements de B a un exposant ≥ 2. Il suffit de le montrer pour $n = 2$. Car si c'est le cas, posons pour $x \in B$, $e_x = o(x/k) - 2$ si $o(x/k) \geq 2$, et $e_x = 0$ sinon. Comme $k(x^{p^{e_x}})_{x\in B} \subset k_2$, on a $k(x^{p^{e_x+1}})_{x\in B} \subset kk_2^p$ qui alors simple sur k, donc $k(x^{p^{e_x+1}})_{x\in B}/k$ est simple.

   Désormais on suppose $n = 2$. Supposons que deux élements θ_1 et θ_2 de B vérifient $o(\theta_i/k) \geq 2$. Posons $C = B \setminus \{\theta_1, \theta_2\}$. Si on avait $k_1 \cap k(C) \subset (k(C)(\theta_1, \theta_2))^p$, alors $k \subset K^p$. Donc il existe $x \in k_1 \cap k(C) \setminus (k(C)(\theta_1, \theta_2))^p$. Il en résulte que $(\theta_1^{p^2}, \theta_2^{p^2}, x)$ est p-libre sur $k(C)$. Posons $\xi = \theta_2^p - x\theta_1^p$. On a $(\theta_1^{p^2}, \xi, x)$ p-libre sur $k(C)(\xi)$. Car si $\theta_1^{p^2} \in (k(C)(\xi))^p$, alors $\theta_1^{p^2} \in (k(C))^p(\theta_2^{p^2} - x^p\theta_1^{p^2}, x)$: donc $\theta_1^{p^2} \in (k(C))^p(\theta_2^{p^2}, x)$. Et $x \notin$

$(k(C)(\xi))^p(\theta_1^{p^2})$ (car sinon $x \in k(C)^p(\theta_1^{p^2}, \theta_2^{p^2})$) et $\xi \notin (k(C)(\xi))^p(\theta_1^{p^2}, x)$ (car sinon $\xi \in (k(C))^p(\theta_1^{p^2}, x)$, donc $\theta_2^p \in k(C)^p(\theta_1^p, x)$), donc $\theta_2^{p^2} \in k(C)^p(\theta_1^{p^2}, x)$). Posons $L = k(\xi, x)$. D'une part on a k_2/L modulaire, car $L \subset k_1 \subset k^{p^{-1}}$ et $(k^{p^{-1}})^p \subset L$ donc $k^{p^{-1}}/L$ est modulaire, donc $k^{p^{-2}}/L$ est modulaire, comme K/L est modulaire (toujours) $k_2 = k^{p^{-2}} \cap K$ est modulaire sur L. D'autre part $o(\theta_1/L) = 2$ car si $\theta_1^p \in L$ alors $\theta_1^{p^2} \in k^p(\xi, x) \subset k(C)^p(\xi, x)$. On a $\theta_2^p = \xi + x\theta_1^p$, par un argument classique de modularité, on en déduit que $\xi, x \in k_2^p$. (En effet $(1, \theta_1^p)$ est libre sur L, donc sur $L \cap k_2^p$, donc se prolonge en une base de $k_2^p/L \cap k_2^p$, qui est une base de k_2L/L, d'où par identification $\xi, x \in k_2^p \cap L$). On a alors $k(C)(\theta_1^p, x^{p^{-1}}, \xi^{p^{-1}}) \subset k_2 = k(C)(\theta_1, \theta_2)$. Par [1] (voir aussi [2] §2), cela contredit $(\theta_1^{p^2}, \xi, x)$ p-libre sur $k(C)(\xi)$. Par suite pour tout n, l'extension kk_n^p/k est simple. Donc $k(K^p) = \bigcup kk_n^p$ est q-simple sur k.

2. Cas général

   Si $\forall n, k \subset K^{p^n}$, alors $k \subset \bigcap_n K^{p^n}$, par suite, comme K/k est purement inséparable, on aurai $K = K^p$ parfait. Donc si K est non parfait, il existe n tel que $k \subset K^{p^n} \setminus K^{p^{n+1}}$, c'est à dire $k \subset K^{p^n}$ et $k^{p-1} \not\subset K^{p^n}$. Comme K^{p^n}/k vérifie aussi les hypothèses du théorème (cf. proposition 1), d'après le 1er cas $k(K^{p^{n+1}})/k$ est simple.

Dans les deux cas il existe un entier n tel que $k(K^{p^{n+1}})/k$ est simple. Soit k_r la cloture relativement parfaite de k dans K. Posons $S = k(K^{p^{n+1}})$. On a S/k relativement parfaite. Donc $S \subset k_r$. Or $k_r (= k(k_r^{p^{n+1}})) \subset k(K^{p^{n+1}})$. Donc $k_r = S = k(K^{p^{n+1}})$. Par le théorème 1, on a

$$K = k_r \otimes_k M.$$

Avec M/k produit tensoriel sur k d'extensions simples sur k, on veut montrer que $o(M/k) = 1$. La preuve est semblable à celle de [5]. On a seulement remplacé une extension simple par une extension q-simple. Supposons $e = o(M/k) \geq 2$. Soit B une subbase de M/k. Soit $\theta_1 \in B$ d'exposant e sur k. Notons $\alpha_2 = \theta_1^{p^{e-2}}$. Posons $k^{p^{-1}} \cap k_r = k(\alpha_1^p)$ et $C = B \setminus \{\theta_1\}$. Comme $di(k) = di(k(C)(\alpha_1, \alpha_2)) > 2$, on ne peut avoir $k(C) \subset (k(C)(\alpha_1, \alpha_2))^p \subset k(C)(\alpha_1, \alpha_2)$ (cf. [1] voir aussi [2] §2), donc il existe $x \in k(C) \setminus (k(C)(\alpha_1, \alpha_2))^p$, alors $(x, \alpha_1^{p^2}, \alpha_2^{p^2})$ est p-libre sur $k(C)$. Posons comme ci-dessus, $\xi = \alpha_2^p - x\alpha_1^p$. On a $(\alpha_1^{p^2}, \xi, x)$ p-libre sur $k(C)(\xi)$. Posons $L = k(\xi, x)$. Comme K/L est modulaire et $o(\alpha_1/L) = 2$, par un argument de modarité comme ci-dessus, on en déduit que $x^{p^{-1}}, \xi^{p^{-1}} \in K$. On a $k(C)(\alpha_1^p, x^{p^{-1}}, \xi^{p^{-1}}) \subset k_r k(C)(\theta_1) =$

$\bigcup_n k(a_n)k(C)(\theta_1)$. Comme $k(C)(\alpha_1^p, x^{p^{-1}}, \xi^{p^{-1}})/k(C)$ finie, il exsite a_i tel que $k(C)(\alpha_1^p, x^{p^{-1}}, \xi^{p^1}) \subset k(C)(a_i, \theta_1)$. Par [1] (voir aussi [2] §2), ceci contredit $(\alpha_1^{p^2}, \xi, x)$ p-libre sur $k(C)(\xi)$.

References

[1] Beckert, M.T. and Maclane S., *The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions,* Bull . Am. Math. Soc, **46**(1940), 182-186.

[2] M. Chellali et E. Fliouet, *Extensions purement inséparables d'exposant non borné,* Archivum Mathematicum, **40** (2004), 129-159.

[3] M. Chellali et E. Fliouet, *Sur les extensions purement inséparables,* Arch.Math., **81** (2003), 369-382.

[4] L.A Kime, *Purely inseparable modular extensions of unbounded exponent,* Trans. Amer. Math. Soc, **176**(1973), 335-349.

[5] J.N Mordeson, *On a Galois theory for inseparable field extensions,* Trans. Am. Math. Soc., **214**(1975), 337-347.

[6] M.E Sweedler,*Structure of inseparable extensions*, Ann. Math., **87**(2)(1968), 401-410.

Université Mohammed 1
Département de mathématiques Faculté des sciences,
Oujda,
Maroc
e-mail: chellali@sciences.univ-oujda.ac.ma