An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 11(2), 2003, 183–188

CONSIDERAŢII ASUPRA PERTURBĂRII VECTORILOR b ŞI c DIN PROBLEMA DE PROGRAMARE LINIARĂ

Paul Vasiliu

Abstract

Subiectul acestei lucrări se încadrează în domeniul analizei sensibilităţii în programarea liniară. În lucrare se determină margini ale valorilor termenilor liberi şi ale coeficienţilor funcţiei obiectiv din problema de programare liniară în condiţiile de existenţă a programelor optime, folosindu-se metoda punctului interior. Lucrarea este o generalizare a rezultatelor din [2].

1. Introducere

Problema studiului optimalităţii unei baze B a problemei de programare liniară în raport cu modificarea vectorilor b şi c este rezolvată de metode simplex, care însă furnizează o singură margine pentru componentele vectorilor b şi c. În [2], autorii aplică metoda punctului interior problemei standard de programare liniară şi dualei ei, obţinând două margini pentru componentele vectorilor b şi c. În lucrarea de faţă obţinem astfel de margini pentru problema canonică (toate restricţiile concordante şi toate variabilele nenegative) şi duala ei, adică, pentru cuplul dual simetric, folosind metoda punctului interior.

Fie $c \in R^n$, $b \in R^m$ vectori constanţi, $A \in R^{m\times n}$ o matrice cu elemente constante, cu $rangA = \min(m,n)$, $x \in R^n$ vector variabil şi cuplul dual simetric:

$$\begin{cases} \max(c^T x) \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

cu forma standard

$$\begin{cases} \max(c^T x) \\ Ax + y = b \\ x \geq 0,\ y \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

şi

$$\begin{cases} \min(b^T u) \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

cu forma standard

$$\begin{cases} \min(b^T u) \\ A^T u + v = c \\ u \geq 0,\ v \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

cu $y \in R^m,\ u \in R^m$ şi $v \in R^n$.

Notăm problema (2) cu $PP(b, c)$, iar problema (4) cu $PD(b, c)$. Presupunem că problema $PP(b, c)$ are programe optime. Fie $(\bar{x}, \bar{y})$ un program optim al problemei $PP(b, c)$ şi $(\bar{u}, \bar{v})$ un program optim al problemei $PD(b, c)$. Vom presupune că programele optime $(\bar{x}, \bar{y})$şi $(\bar{u}, \bar{v})$ verifică condiţiile de admisibilitate primală şi duală cu inegalităţi stricte.

Punctul $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$ îl vom numi *program optim strict admisibil* al problemei $PP(B, c)$ şi $PD(b, c)$.

Fie

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)\,,\ \bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_m)\,,\ \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_m)\,,\ \bar{v} = (\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n)\,,$$

$$X = diag\,(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)\,,\ Y = diag\,(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_m)\,,\ U = diag\,(\bar{u}_1, \bar{u}_m)\,,$$

$V = diag\,(\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n)\,,\ e \in R^n$ vectorul unitar din R^n şi $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu), \bar{u}(\mu), \bar{v}(\mu))$, $\mu > 0$ un şir de programe optim strict admisibile. Evident, fiecare termen din acest şir satisface, pentru orice $\mu > 0$, sistemul neliniar de ecuaţii:

$$\begin{cases} Ax + y = b \\ A^T u - v = c \\ XVe = \mu e \\ YUe = \mu e. \end{cases} ,x, y, u, v > 0. \tag{5}$$

O iteraţie în metoda punctului interior este e fapt un pas al metodei lui Newton aplicată sistemului (5). Dacă (x, y, u, v) este soluţia la iteraţia curentă a sistemului (5), atunci la următoarea iteraţie se determină punctul $(\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v) \in R^n \times R^m \times R^m \times R^n$ din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} &A(x + \Delta x) + (y + \Delta y) = b \\ &A^T(u + \Delta u) - (v + \Delta v) = c \\ &(X + I_n \Delta x)(V + I_n \Delta v)e = \mu e \\ &(Y + I_m \Delta y)(U + I_m \Delta u)e = \mu e, \end{aligned} \tag{6}$$

sistem echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta y = b - Ax - y \\ A^T \Delta u - \Delta v = c - A^T u + v \\ X\Delta v + V\Delta x = \mu e - XVe \\ Y\Delta u + U\Delta y = \mu e - YUe. \end{cases} \tag{7}$$

Fie $r_p = b - Ax - y$ reziduul primal, $r_d = c - A^T u + v$ reziduul dual, $r_{xv} = \mu e - XVe$ reziduul prim-dual şi $r_{yu} = \mu e - YUe$ reziduul dual-primal. Sistemul (7) se rescrie sub forma:

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta y = r_p \\ A^T \Delta u - \Delta v = r_d \\ X\Delta v + V\Delta x = r_{xv} \\ Y\Delta u + U\Delta y = r_{yu}. \end{cases} \tag{8}$$

Propoziţia 1. *Sistemul (8) are soluţie unică dată de:*

$$\Delta u = (I_m + (AV^{-1}XA^T)^{-1}U^{-1}Y)^{-1}(AV^{-1}XA^T)^{-1} \tag{9}$$

$$(AV^{-1}Xr_d - r_p + AV^{-1}r_{xv} + U^{-1}r_{yu})$$

$$\Delta v = A^T \Delta u - r_d \tag{10}$$

$$\Delta x = V^{-1}(r_{xv} - X\Delta v) \tag{11}$$

$$\Delta y = U^{-1}(r_{yu} - Y\Delta u). \tag{12}$$

Demonstraţie. Deoarece $rangA = \min(m, n)$ sistemul (8) are soluţie unică. Din ecuaţiile $A^T\Delta u - \Delta v = r_d$ amplificate la stânga cu $AV^{-1}X$, rezultă ecuaţiile:

$$AV^{-1}XA^T\Delta u - AV^{-1}X\Delta v = AV^{-1}Xr_d. \tag{13}$$

Deoarece $rangA = \min(m, n)$, rezultă că matricea $AV^{-1}XA^T$ este simetrică şi pozitiv definită, deci nesingulară. Din ecuaţiile (13), rezultă că:

$$\Delta u = (AV^{-1}XA^T)^{-1}(AV^{-1}Xr_d + AV^{-1}X\Delta v). \tag{14}$$

Ecuaţiile $V\Delta x + X\Delta v = r_{xv}$, amplificate la stânga cu AV^{-1}, conduc la ecuaţiile $A\Delta x + AV^{-1}X\Delta v = AV^{-1}r_{xv}$. Cum $A\Delta x = r_p - \Delta y$, rezultă că:

$$AV^{-1}X\Delta v = \Delta y + AV^{-1}r_{xv} - r_p. \tag{15}$$

Amplificând la stânga ecuaţiile $Y\Delta u + U\Delta y = r_{yu}$ cu U^{-1}, obţinem:

$$\Delta y = U^{-1} r_{yu} - U^{-1} Y \Delta u. \tag{16}$$

Înlocuind (16) în (15) se obţine

$$AV^{-1} X \Delta v = U^{-1} r_{yu} - U^{-1} Y \Delta u + AV^{-1} r_{xv} - r_p. \tag{17}$$

Înlocuind (17) în (14) se obţine (9). Relaţiile (10)-(12) rezultă direct din sistemul (8), propoziţia fiind demonstrată.

2. Perturbarea vectorului b

Propoziţia 2. *Fie problemele $PP(b,c)$, $PD(b,c)$ şi (x,y,u,v), un program optim strict admisibil al lor. Dacă vectorul b se înlocuieşte cu vectorul $b' = b + \Delta b$, unde $\Delta b \in R^m$, fie (x', y', u', v') un program optim strict admisibil al problemelor $PP(b,c)$, $PD(b,c)$ cu proprietăţile $X'V' = XV$ şi $Y'U' = YU$. Programul (x,y,u,v) este un program optim strict admisibil al problemelor $PP(b',c)$, $PD(b',c)$ dacă şi numai dacă are loc inegalitatea:*

$$||\Delta b||_\infty = \frac{1}{||V^{-1}A^T(I_m + (AV^{-1}XA^T)^{-1}U^{-1}Y)^{-1}(AV^{-1}XA^T)^{-1}||_\infty}. \tag{18}$$

Demonstraţie. Evident, în acest caz,

$$r_p = b' - Ax - y = b + \Delta b - Ax - y = \Delta b,$$

$$r_d = c - A^T u + v = 0,\ r_{xv} = \mu e - XVe = 0,\ r_{yu} = \mu e - YUe = 0.$$

Sistemul (8) devine:

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta y = \Delta b \\ A^T \Delta u - \Delta v = 0 \\ X\Delta v + V\Delta x = 0 \\ Y\Delta u + U\Delta y = 0 \end{cases}. \tag{19}$$

Din a treia ecuaţie din sistemul (19), scrisă pe componente, rezultă că:

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} + \frac{\Delta v_i}{v_i} = 0, i = 1, ..., n. \tag{20}$$

Din condiţia de admisibilitate, rezultă că: $x_i + \Delta x_i \geq 0$ şi $v_i + \Delta v_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. De aici se obţine că $1 + \dfrac{\Delta x_i}{x_i} \geq 0$ şi $1 + \dfrac{\Delta v_i}{v_i} \geq 0$, de unde

$$\frac{\Delta v_i}{v_i} \geq -1,\ i = 1, ..., n. \tag{21}$$

Din (20), rezultă că $\dfrac{\Delta v_i}{v_i} = \dfrac{\Delta x_i}{x_i} \geq -1$, de unde se obţine inegalitatea:

$$\frac{\Delta v_i}{v_i} \leq 1,\ i = 1, ..., n. \tag{22}$$

Din (21) şi (22) se obţine $\left|\dfrac{\Delta v_i}{v_i}\right| \leq 1,\ i = 1, ..., n$, adică:

$$\left|\left|V^{-1}\Delta v\right|\right|_\infty \leq 1. \tag{23}$$

Analog, se obţine că $\left|\left|U^{-1}\Delta u\right|\right|_\infty \leq 1$. Din Propoziţia 1 şi sistemul (19), rezultă:

$$\Delta u = \left(I_m + (AV^{-1}XA^T)^{-1}U^{-1}Y\right)^{-1}\left(AV^{-1}XA^T\right)^{-1}(-\Delta b), \tag{24}$$

$$\Delta v = A^T\Delta u. \tag{25}$$

Înlocuind (24) în (25) şi folosind (23) rezultă (18).

3. Perturbarea vectorului c

Propoziţia 3. *Fie problemele $PP(b,c)$, $PD(b,c)$ şi (x, y, u, v), un program optim strict admisibil al lor. Dacă vectorul b se înlocuieşte cu vectorul $c' = c + \Delta c$, $\Delta c \in R^n$, fie (x', y', u', v') un program optim strict admisibil al problemelor $PP(b, c')$, $PD(b, c')$ cu proprietăţile $X'V' = XV$ şi $Y'U' = YU$. Programul (x, y, u, v) este un program optim strict admisibil al problemelor $PP(b', c)$, $PD(b', c)$ dacă şi numai dacă are loc inegalitatea:*

$$||\Delta c||_\infty = \frac{1}{||U^{-1}(I_m + (AV^{-1}XA^T)^{-1}U^{-1}Y)^{-1}(AV^{-1}XA^T)^{-1}AV^{-1}X||_\infty}. \tag{26}$$

Demonstraţie. În acest caz, $r_p = r_{xv} = r_{yu} = 0$ şi $r_d = \Delta c$. Sistemul (8) devine:

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta y = \Delta b \\ A^T\Delta u - \Delta v = \Delta c \\ X\Delta v + V\Delta x = 0 \\ Y\Delta u + U\Delta y = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Din Propoziţia 1 şi sistemul (27), rezultă:

$$\Delta u = \left(I_m + (AV^{-1}XA^T)^{-1}U^{-1}Y\right)^{-1}\left(AV^{-1}XA^T\right)^{-1}AV^{-1}X\Delta c. \tag{28}$$

Amplificând în (28) la stânga cu U^{-1} şi folosind inegalitatea $\left|\left|U^{-1}\Delta u\right|\right|_{\infty} \leq 1$ din Propoziţia 2, se obţine (26).

Bibliografie

1. Roos, C., Terlaky, T., Vial, J., *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach,* John Wiley&Sons, Chichester, 1997.

2. Yildirim, E.A., Todd, J.M., *Sensitivity Analysis in Linear Programming Using Interior-Point Methods*, Mathematical Programming 90, Springer-Verlag, 2001.

Academia Navală "Mircea cel Bătrân",
Str. Fulgerului nr. 1, 900218, Constanţa, România