An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 9(2), 2001, 175–180

ASUPRA MULŢIMILOR NUANŢATE

Doina Tofan, Ioan Tofan and Aurelian Claudiu Volf

Dedicated to Professor Mirela Ştefănescu on the occasion of her 60th birthday

Abstract

This is an overview of the notion of fuzzy set, discussing its philosophical and mathematical origins, the various types of fuzzy sets and mappings and their interpretations in topos theory.

O privire retrospectivă asupra evoluţiei mecanismelor implicate în "a gândi însăşi gândirea" (Aristotel) relevă o anumită persistenţă a preocupărilor faţă de ceea ce, precum Wittgenstein, putem aprecia ca fiind o trăsătură esenţială a limbajului comun - anume *ambiguitatea* (vagul, incertitudinea, imprecizia fiind ipostazele uzuale ale acesteia). Este necesar să amintim în acest context şi distincţia făcută de Platon în Republica între cunoaşterea certă (episteme) şi cea grevată de incertitudine (doxa), incertitudine datorată şi imperfecţiunilor lumii cuvintelor ce constituie doar o palidă reflectare a lumii reale (perfecte). Mai mult, este pus sub semnul îndoielii caracterul absolut al unora dintre principiile propuse să guverneze activitatea specific umană şi atât de complexă de "cugetare" (în sens cartezian).

Aristotel, de exemplu, remarcă inaplicabilitatea principiului terţului exclus referitor la lucruri viitoare, iar ideea acceptării (sau neacceptării) unui determinism absolut a conturat, în antichitate, două şcoli filosofice - epicurianismul şi stoicismul. Ulterior se pot face referiri la R. Descartes, I. Kant, H. Poincaré, G. Frege, B. Russel, L. Brouwer, W. Heisenberg, H. Weyl, A. Heyting, M. Dummet.

Se impun aici câteva precizări terminologice: în general, "incertitudinea" derivă din cunoaşterea incompletă (sau necunoaşterea) legilor de funcţionare a sistemelor abstracte sau concrete (phisi & thesi) şi se referă, în special, la fenomene în devenire; "imprecizia" se datorează limbajului, pe de o parte, pe

Key Words: Fuzzy set, totally fuzzy set.
Mathematical Reviews subject classification: 03E72
Received: October, 2001

de altă parte are un sens mult mai concret – anume cel legat de conceptul de măsurare; "vagul" se referă în principal la noţiuni, fiind perceptibil mai ales în procesul de conturare a sferelor acestora.

Se disting numeroase surse ale vagului: limbajul, modul uman de gândire precum şi cele ce rezidă într-un indeterminism aprioric empiric (acesta din urmă legat mai mult de teoria încrederii). Amintim în acest sens două remarcabile opinii: "Vagueness or precision are characterisics which can only belong to a representation… they have to do with the relation between a representation and what it represents" (B. Russel, 1923) şi "A satisfactory account of vagueness ought to explain two contrary feelings we have: the one expressed by Frege that the presence of vague expressions in a language invests it with an intrinsec incoherence; and the opposite point of view contended for by Wittgenstein, that vagueness is an essential feature of language" (M. Dummet, 1975).

În legătură cu precizarea sferelor noţiunilor pot fi puse şi modalităţile uzuale de determinare a mulţimilor în cadrul teoriei (naive) a mulţimilor. Încercările de modelare matematică a lumii reale în confruntarea cu vagul, sursele şi implicaţiile sale au dus la apariţia mulţimilor fuzzy. Cităm: "An underlying philosophy of the theory of fuzzy sets is to provide a strict mathematical framework where imprecise conceptual phenomena in modelling and decision making may be precisely and rigorously studied." (A. Kaufmann, M. Gupta, 1988). Se poate spune şi că: "Fuzzy–ism is a body of concepts and techniques aimed at providing a systematic framework for dealing with vagueness and imprecision inherent in human thought processes" (M. Gupta, 1977). Parafrazând definiţia dată de B. Russel matematicii, se poate spune şi că "the theory of fuzzy sets is the activity performed by a large number of people that agree to name it in this way" sau să considerăm că "the active experience within the field may answer to the question: What is the fuzzy set?" (parafrazând de data aceasta pe R. Courant şi H. Robbins). Cităm în acest context şi pe J. Goguen: "fuzzy something is fuzzy subset of something".

În parte, "incertitudinea" este abordată cu ajutorul teoriei probabilităţilor, iar "imprecizia" cu o aritmetică a cantităţilor imprecise. Evident că există interferenţe, precum şi alte puncte de vedere, cum ar fi cel al rough–set–urilor.

Precizăm că "vagul" şi deci teoria mulţimilor fuzzy include şi proprietăţi derivate prin grade lingvistice (mare, foarte …) precum şi adjectivizări (relativizări) ale unor caracteristici (înălţimea unui arbore → arbore înalt).

Este recunoscut faptul că mulţimile fuzzy se obţin prin generalizarea noţiunii de funcţie caracteristică a unei submulţimi. Anume, numim *mulţime fuzzy* (sau, mai precis, submulţime fuzzy a unei mulţimi) orice cuplu (U, μ), unde U este o mulţime nevidă, iar $\mu : F \to [0, 1]$, $\mu(x)$ având semnificaţia de "gradul" în care x aparţine submulţimii (fuzzy) determinate de μ. Drept punct de plecare este considerat articolul publicat în 1965 de L. Zadeh. Construcţii similare au dat însă (fără a le evidenţia potenţialul aplicativ) şi H. Weyl (1940), A. Kaplan & F. Schott (1951), K. Menger (1951).

H. Weyl defineşte chiar şi operaţiile standard cu submulţimi fuzzy (fără a le numi astfel); lucrarea publicată (în limba franceză) de K. Menger acreditează noţiunea de "ensemble flou" (autorul îi asociază corespondentul "hazy set" în limba engleză), pentru care se atribuie elementelor probabilităţi de apartenenţă la mulţimea respectivă (altfel spus grade de apartenenţă). Aceste grade de apartenenţă apar şi în lucrarea publicată de A. Kaplan şi H. Schott, unde sunt interpretate drept "probabilităţi nominale". Este meritul lui L. Zadeh de a fi redescoperit şi în special de a fi prezentat aplicaţii consistente, în fine, de a fi impus această teorie.

Generalizări ale noţiunii de funcţie caracteristică au mai dat Y. Gentilhomme (1968), H. Rasiowa (1962). Termenul de "mulţime nuanţată" (echivalentul în limba română pentru "fuzzy set") a fost propus de G. Moisil. Amintim şi că cea de a doua monografie în lume (în ordine cronologică) a apărut în România: cartea *Mulţimi fuzzy şi aplicaţiile lor*, scrisă de C.V. Negoiţă şi D. Ralescu, a apărut în 1974, la un an de la apariţia monografiei scrise de A. Kaufmann. Putem aprecia că teoria mulţimilor nuanţate a beneficiat de o explozivă proliferare a aplicaţiilor în inteligenţa artificială, în diverse ramuri industriale, în medicină, economie.

Intervalul $[0, 1]$ este înlocuit, după necesităţi, cu o latice (sau cu o algebră Heyting) sau cu o mulţime de forma $\{0, 1/2, 1\}$ (în conexiune directă cu logicile trivalente sau cu rough–set-urile) sau cu o mulţime de forma $\{0; 0,1; \dots ; 0,9; 1\}$ cu semnificaţiile: 0 – fals (incoerent, inacceptabil); 0,1 – cvasifals …; 0,2 – aproape fals…; 0,3 - mai mult fals decât adevărat…; 0,4 – cvasiindecidabil; 0,5 – nici fals nici adevărat …; 0,6 - cvasiindecidabil; 0,7 – mai mult adevărat decât fals… ; 0,8 – aproape adevărat…; 0,9 – cvasiadevărat…; 1 – adevărat (coerent).

O mai mare adecvare la realitate poate fi adusă prin considerarea unei eventuale dependenţe de timp a gradelor de apartenenţă. Aceasta se poate realiza prin introducerea unei noi variabile, considerând $\mu : X \times T \to [0, 1]$, unde T este o mulţime de momente temporale, iar $\mu(x, t)$ semnifică gradul de apartenenţă al elementului x (la submulţimea fuzzy determinată de μ) la momentul $t \in T$.

Următorul pas în dezvoltarea teoriei mulţimilor nuanţate este constituit de definirea aplicaţiilor între mulţimi nuanţate. Fie (X, μ), (Y, τ) mulţimi nuanţate (adică $\mu : X \to [0, 1]$ şi $\tau : Y \to [0, 1]$). O aplicaţie $f : X \to Y$ este numită *funcţie nuanţată* (varianta 1) dacă $\tau(f(x) \geq \mu(x))$, pentru orice $x \in X$.

Este propusă şi următoarea variantă: o *funcţie nuanţată* (varianta 2) între mulţimile nuanţate (X,μ) şi (Y,τ) este o aplicaţie $f : X \times Y \to [0,1]$ cu proprietăţile:

i) $f(x,y) \le \min(\mu(x),\tau(y))$, $\forall x \in X, y \in Y$;

ii) $\forall x \in X,\ \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\} = \mu(x)$

iii) $\forall y,y' \in Y, y \ne y' \Rightarrow \min\{f(x,y), f(x,y')\} = 0$

În acest caz, compunerea funcţiilor f (între (X,μ) şi (Y,τ)) şi g (între (Y,τ) şi (Z,ν)) este dată prin:

$$\forall x \in X, \forall z \in Z, (g \circ f)(x,z) = \sup_{y\in Y}\{\min\{f(x,y), g(y,z)\}\}$$

Ulterior nuanţării "relaţiei de apartenenţă" a fost nuanţat şi cel de al doilea predicat (esenţial) al teoriei mulţimilor, anume cel de *egalitate* (prin introducerea "gradului de indiscernabilitate între elemente"). În acest context, prin *mulţime total nuanţată* se înţelege un cuplu (X,σ), unde X este o mulţime nevidă, iar $\sigma : X \times X \to [0,1]$ satisface condiţiile:

i) $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$, $\forall x,y \in X$;

ii) $\inf\{\sigma(x,y),\sigma(y,z)\} \le \sigma(x,z)$,$\forall x,y,z \in X$,

Remarcăm faptul că, dacă (X,μ) este o mulţime nuanţată, se obţine o mulţime total nuanţată definind $\sigma : X \times X \to [0,1]$ prin $\forall x,y \in X$, $\sigma(x,y) = \inf\{\mu(x),\mu(y)\}$ (o altă variantă este dată de $\sigma(x,y) = 1-\mu(x)-\mu(y)+2\mu(x)\cdot\mu(y)$). Reciproc, având o mulţime total nuanţată (X,σ) se obţine o mulţime nuanţată (X,μ), unde $\mu : X \to [0,1], \mu(x) = \sigma(x,x)$. Relativ la funcţiile total nuanţate se cunosc două variante de definiţie:

(v1) Prin funcţie total nuanţată $f : (X,\sigma) \to (Y,\tau)$, unde (X,σ), (Y,τ) sunt mulţimi total nuanţate, se înţelege o aplicaţie $f : X \times Y \to [0,1]$ aşa încât:

i) $\forall x,x' \in X, \forall y \in Y, \inf\{f(x,y), \sigma(x,x')\} \le f(x',y)$;

ii) $\forall x \in X, \forall y,y' \in Y, \inf\{f(x,y), f(x,y')\} \le \tau(y,y')$;

iii) $\forall x \in X, \sup\{f(x,y) \mid y \in Y\} = \sigma(x,x)$

Prin funcţie total nuanţată (v2) între mulţimile total nuanţate (X,σ) şi (Y,τ) se înţelege o relaţie binară $R \subseteq X \times Y$ aşa încât:

i) $\forall x \in X, \{y \in Y \mid xRy\} \ne \emptyset$;

ii) $\forall x,x' \in X, \forall y,y' \in Y,\ xRy, x'Ry' \Rightarrow \sigma(x,x') \le \tau(y,y')$;

iii) $\forall x, x' \in X, \forall y, y' \in Y$, $xRy, \sigma(x, x') \leq \tau(y, y') \Rightarrow x'Ry'$;

Dacă [0,1] se înlocuieşte cu o latice (sau algebră Heyting) J, se obţin aşa numitele mulţimi (respectiv funcţii) *J-total nuanţate*.

În contextul anterior apare problema transferului (extinderii) rezultatelor matematice clasice în cadrul mulţimilor (total) nuanţate, altfel spus organizarea acestora în "teorii locale". Rezolvarea este adusă de teoria toposurilor (un topos având calitatea de obiect sintactic în care se pot interpreta propoziţiile unui limbaj de ordin superior). Mulţimile nuanţate, ca obiecte, împreună cu funcţiile nuanţate (v1), ca morfisme, constituie o categorie notată Set$J$.

Considerând cea de a doua variantă pentru funcţiile nuanţate se obţine o categorie notată Fuz$J$. Mulţimile total nuanţate, împreună cu funcţiile total nuanţate, (v1, respectiv v2) conduc la categoriile $\mathcal{S}(J)$, respectiv JTF.

Au loc rezultatele următoare:

i) $\mathcal{S}(J)$ este topos Grothendieck;

ii) un topos $\mathcal{E}$ este echivalent cu un topos $\mathcal{S}(J)$ dacă si numai dacă: a) $\mathcal{E}$ posedă produse oarecare de subobiecte ale obiectului final 1 şi b) subobiectele obiectului final 1 al lui $\mathcal{E}$ constituie o clasă de generatori;

iii) Fuz$J$ este topos dacă şi numai dacă J este algebră Boole (în acest caz Fuz$J$ este topos boolean);

iv) JTF este topos elementar dacă şi numai dacă J este algebră Heyting completă şi orice submulţime nevidă a lui J admite un cel mai mare element;

v) Set$J$ este topos slab;

vi) dacă J este algebră Boole, atunci Set$J$ şi Fuz$J$ sunt categorii echivalente.

References

[1] J.& J.-L. Coulon: *Remarques sur certaines categories d'ensembles totalement flous*, BUSEFAL, 21, p. 11 - 29; 23, p 4 - 13; 24, p. 4 - 12, 1981.

[2] M. Eytan: *Fuzzy sets, a topos logical point of view*, F.S.S. 5, p. 47 - 67, 1981.

[3] J.A. Goguen: *The logic of inexact concepts*, Synthese, 19, p. 325 - 373, 1968.

[4] J.A. Goguen: *Concept representation in natural and artificial language, axioms, extensions and appl. for sets*, Int. J. Man. Machine Studies, 6, p. 513 - 561, 1974.

[5] M.M. Gupta: *Fuzzy-ism, the first decade*, in Fuzzy automata and decision, North-Holland, 1977.

[6] D. Higgs: *Injectivity in the topos of complete Heyting-algebra valued sets*, Canad. J. Math; 36, p. 556 - 561, 1984.

[7] A. Kaplan, H.F. Schott: *A calculus for empirical classes*, Methods, vol. III, nr. 11, p. 165 - 168, 1951.

[8] K. Menger: *Ensembles flous et functions aléatoires*, C.R. Acad.Sci. Paris, 322, p. 2001 - 2003, 1951.

[9] C.V. Negoiţă: *Fuzzy Sets*, New Falcon Publ., USA, 2000.

[10] W. Ostasiewicz: *Some philosophical aspects of fuzzy sets*, Fuzzy Economic Review n.2, p. 1 - 33, 1996.

[11] B. Russel: *Vagueness; Austr. J. of Philosophy*, n. 1, p. 84 - 92, 1923.

[12] H.N. Teodorescu: *Teoriile fuzzy - o abordare tehnică a proceselor de cunoaştere*, Bul. A.O.S., Iaşi, n.1, p. 68 - 72, 1990.

[13] D. Tofan, I. Tofan: *Une introduction dans la théorie des ensembles flous et dans la logique floue*, Scripta Sci. Math., t 1, p. 239 - 256, 1997.

[14] I. Tofan: *Toposes of (totally) fuzzy sets*, BUSEFAL, 58, p. 60 - 65, 1994.

[15] H. Weyl: *Mathematic and logic*, Amer. Math. Month, 53, p. 2 - 13, 1946.

[16] L. Zadeh: *Fuzzy Sets*, Inf. And Control, 8, p. 338 - 353, 1965.

Liceul "C. Negruzzi",
6600 Iaşi,
Romania

"A.-I. Cuza" University,
Faculty of Mathematics,
6600 Iaşi,
Romania
e-mail: tofan@uaic.ro

"A.-I. Cuza" University,
Faculty of Mathematics,
6600 Iaşi,
Romania
e-mail: volf@uaic.ro